



TITLE:

# 二状態雑音の非線型系に対する影響 (確率過程論と開放系の統計力学)

AUTHOR(S):

北原, 和夫; 稲葉, 豊

---

CITATION:

北原, 和夫 ...[et al]. 二状態雑音の非線型系に対する影響 (確率過程論と開放系の統計力学). 数理解析研究所講究録 1979, 367: 153-162

ISSUE DATE:

1979-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104619>

RIGHT:

## 二状態雑音の非線型系に与える影響

東大 理

北原 和夫<sup>(\*)</sup>

稲葉 豊

<sup>(\*)</sup> 現在は、  
静岡大学 教養

不安定現象を示す非線型系が外部パラメータの揺ぎによってどのように影響されるかについて、揺ぎが白色雑音でガウス過程の場合には、伊藤或いは Stratonovich の方法で、Fokker-Planck 方程式と導き、定常状態の確率分布を求めることができる。雑音の振幅を上げてゆくと、確率分布の形が急に変わり、一種の相転移現象が起こることが知られている。<sup>(1)</sup>

揺ぎが白色雑音でない場合、即ち、揺ぎがある有限な相関時間 $\tau_c$ を持っている場合、一般的な定常分布を求めることは困難であるが、揺ぎが二状態雑音の場合は、揺ぎの任意の振幅及び任意の相関時間に対して、定常分布を解析することができる。<sup>(2)</sup>

先ず、次の様な非線型微分方程式を考えよう、

$$\dot{x}(t) = F(\alpha(t), x(t)). \quad (1)$$

ここで,  $F(\alpha, x)$  は  $\alpha$  と  $x$  の任意の関数で,  $\alpha(t)$  は揺いでいる外部パラメータである。  $\alpha(t)$  は,

$$\alpha(t) = a \text{ or } b \quad (2)$$

の二つの値のみをとるものとし, 値  $a, b$  ととる確率  $P_a(t), P_b(t)$  は, 次のような Markov 過程に従うものとする,

$$\begin{cases} \dot{P}_a(t) = -\frac{\gamma}{2} [P_a(t) - P_b(t)] \\ \dot{P}_b(t) = -\frac{\gamma}{2} [P_b(t) - P_a(t)] \end{cases} \quad (3)$$

この時, 時刻  $t$  に,  $x(t) = x$ ,  $\alpha(t) = a$  or  $b$  とする確率  $P_a(x, t), P_b(x, t)$  は,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} P_a(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} F(a, x) P_a(x, t) - \frac{\gamma}{2} [P_a(x, t) - P_b(x, t)] \\ \frac{\partial}{\partial t} P_b(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} F(b, x) P_b(x, t) - \frac{\gamma}{2} [P_b(x, t) - P_a(x, t)] \end{cases} \quad (4)$$

を満たす。定義から明らかなように, 時刻  $t$  に  $x(t) = x$  とする確率  $P(x, t)$  は

$$P(x, t) = P_a(x, t) + P_b(x, t) \quad (5)$$

より求められる。式 (4) は  $P(x, t)$  と,

$$Q(x, t) \equiv P_a(x, t) - P_b(x, t) \quad (6)$$

に於ける方程式の形に書換えることができる。そして, 自然な境界条件

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} Q(x, t) = 0 \quad (7)$$

と仮定すれば,  $P(x, t)$  について関いた方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = & - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{f}(x) P(x, t) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{g}(x) \int_{-\infty}^t dt' e^{-[\gamma + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{f}(x)](t-t')} \\ & \times \frac{\partial}{\partial x} \tilde{g}(x) P(x, t') \end{aligned} \quad (8)$$

が得られる。ここで,

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \{ F(a, x) + F(b, x) \} \quad (9)$$

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{2} \{ F(a, x) - F(b, x) \}. \quad (10)$$

式(8)に定常分布  $P(x, t) = P_{st}(x)$  を代入すると,

$$0 = - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{f}(x) P_{st}(x) + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{g}(x) \frac{1}{\gamma + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{f}(x)} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{g}(x) P_{st}(x) \quad (11)$$

が得られる。 $x$  の大きいところで  $P_{st}(x)$  及びその微分が 0 になることと仮定すれば,  $\frac{\partial}{\partial x}$  を落としてとることができ,

$$\tilde{f}(x) P_{st}(x) = \tilde{g}(x) \frac{1}{\gamma + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{f}(x)} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{g}(x) P_{st}(x) \quad (12)$$

となり, これは  $P_{st}(x)$  に対する 1 階の常微分方程式

$$\left[ \gamma + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{f}(x) \right] \left( \tilde{f}(x) / \tilde{g}(x) \right) \cdot P_{st}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \tilde{g}(x) P_{st}(x) \quad (13)$$

になる。この解は簡単に求められ,

$$P_{st}(x) = \mathcal{N} \frac{\tilde{g}(x)}{[\tilde{g}(x)]^2 - [\tilde{f}(x)]^2} \times \exp \left[ \gamma \int^x dx' \frac{\tilde{f}(x')}{[\tilde{g}(x')]^2 - [\tilde{f}(x')]^2} \right] \quad (14)$$

となる。もっと便利な公式は、

$$P_{st}(x) = \mathcal{N} \left\{ \frac{1}{F(a, x)} - \frac{1}{F(b, x)} \right\} \times \exp \left[ -\frac{\gamma}{2} \int^x dx' \left\{ \frac{1}{F(a, x')} + \frac{1}{F(b, x')} \right\} \right] \quad (15)$$

である。上の公式から明らかなように、 $F(a, x) = 0$  或いは  $F(b, x) = 0$  となる点は、 $P_{st}(x)$  の特異点になっている。

それぞれ  $x_a, x_b$  と置く。即ち、 $F(a, x_a) = 0$ ,  $F(b, x_b) = 0$ 。定常分布  $P_{st}(x)$  は、 $x = x_\alpha$  ( $\alpha = a, b$ ) で次のように振舞う；

(i)  $\frac{\gamma}{2} \left[ \frac{\partial F}{\partial x}(\alpha, x_\alpha) \right]^{-1} + 1 > 0$  の時、無限大に発散する。

(ii)  $-1 < \frac{\gamma}{2} \left[ \frac{\partial F}{\partial x}(\alpha, x_\alpha) \right]^{-1} + 1 < 0$  の時、 $P_{st}(x_\alpha)$  は 0 になるが、傾きは無限大である。

(iii)  $\frac{\gamma}{2} \left[ \frac{\partial F}{\partial x}(\alpha, x_\alpha) \right]^{-1} + 1 < -1$  の時、 $P_{st}(x_\alpha) = 0$  で、傾きも 0 となる。

$x_\alpha$  ( $\alpha = a, b$ ) が安定な定常状態ならば、 $\frac{\partial F}{\partial x}(\alpha, x_\alpha) < 0$

であるから、上記の (i) ~ (iii) は、 $\gamma$  の増大に対して (つまり相関時間の減少に対して)、安定定常状態の確率が減少することを意味する。

公式 (15) より、定常分布  $P_{st}(x)$  の極値は、

$$\gamma = \frac{2}{[F(a, x)]^2 - [F(b, x)]^2} \times \left\{ -[F(a, x)]^2 \frac{\partial F}{\partial x}(b, x) + [F(b, x)]^2 \frac{\partial F}{\partial x}(a, x) \right\} \quad (16)$$

と解くことにより得られる。

以下応用例を挙げる。

(I) <sup>(3)</sup> Verhulst の人口模型 増殖率  $\alpha(t)$  が揺れている人口模型

$$\dot{x}(t) = \alpha(t)x(t) - [x(t)]^2 \quad (17)$$

を考える。

$$\alpha(t) = \lambda + I(t), \quad (18)$$

$$I(t) = \Delta \text{ or } -\Delta \quad (19)$$

とし、揺ぎの相関関数を

$$\langle I(t)I(t') \rangle = \Delta^2 e^{-\gamma|t-t'|} \quad (20)$$

とする。公式 (14) 或いは (15) を用いると、 $x$  の定常分布は、

$$P_{st}(x) = N x^{\frac{\gamma\lambda}{\Delta^2 - \lambda^2} - 1} |x + \Delta - \lambda|^{-\frac{\gamma}{2(\Delta - \lambda)} - 1} \\ \times |x - \Delta - \lambda|^{\frac{\gamma}{2(\Delta + \lambda)} - 1} \quad (21)$$

[  $\lambda - \Delta \leq x \leq \lambda + \Delta$  に対して ]

$$P_{st}(x) = 0 \quad [ x < \lambda - \Delta \text{ 及び } x > \lambda + \Delta ] .$$

この確率分布は,  $\Delta$  と  $\gamma$  の値によつて定性的に全く異なる振舞をする. [図1を参照]

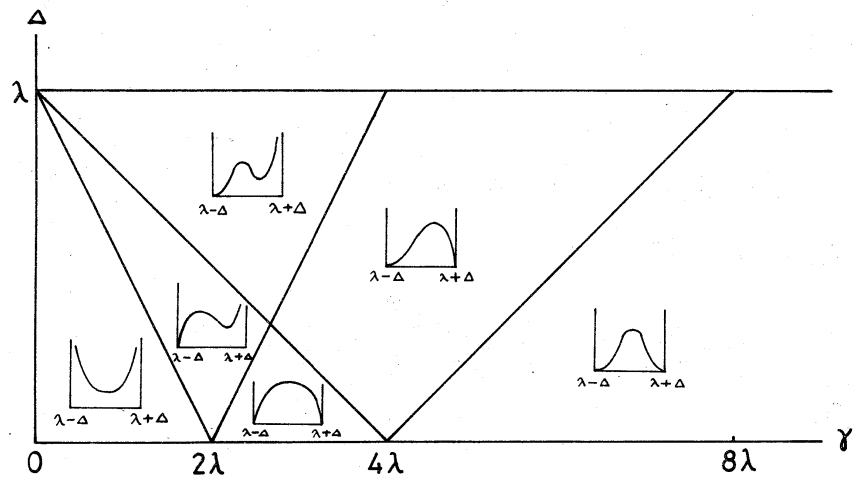


図1. 揺いでいる Verhulst 模型に対する  
定常確率分布  $P_{st}(x)$  の形

(Ⅱ) がん細胞増殖の模型<sup>(4)</sup> Lefever と Garay によつて  
提唱された増殖の模型は,

$$\dot{x} = \alpha + (1 - \theta x)x - \beta x / (1 + x). \quad (22)$$

$\beta$  はがん細胞の増殖能力を抑制する細胞の濃度を表わす。

この外部パラメータを二準位雑音としよう。即ち、

$$\beta(t) = \beta_0 + I(t) \quad (23)$$

とし  $I(t)$  の相関関数は式(20)の如く与えられるものとする。

この系の定常分布は図2のようになる。

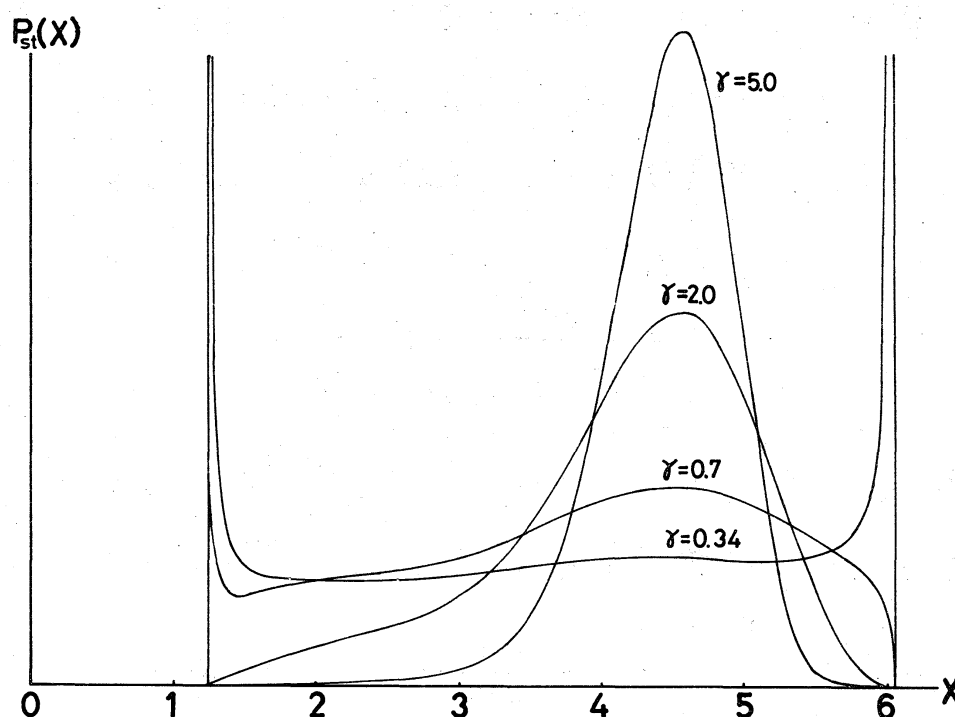


図2. 揺いでいる Lefever - Garay 模型;

$$\dot{x} = \alpha + (1 - \theta x)x - [\beta_0 + I(t)]x/(1+x).$$

$$\langle I(t)I(t') \rangle = \Delta^2 e^{-\gamma|t-t'|} \quad \alpha = 2.4,$$

$$\beta = 5.95, \quad \Delta = 0.35.$$



(Ⅲ) 光を照射した化学反応<sup>(5)</sup> Nitzan と Ross によつて提唱された模型は次の二つの方程式からなる。

$$\begin{cases} \dot{A} = -(k_1 + k_2)A + k_2 a \\ \dot{T} = \alpha A - \beta(T - T_e) + \lambda \dot{A} \end{cases} \quad (24)$$

最初の式は、光を吸収する化学物質  $A$  の濃度に対するものであり、二番目は、温度の時間変化を表わし、光の吸収による熱の発生項  $\alpha A$ 、外界 (温度  $T_e$ ) への熱の放出項  $-\beta(T - T_e)$ 、及び化学反応による熱の発生 (吸収) 項  $\lambda \dot{A}$  からなる。温度変化よりも化学反応の方が急速に進行するとすれば、 $\dot{A} \approx 0$  とおくことができて、

$$\dot{T} = \frac{\alpha a}{\frac{k_1}{k_2} + 1} - \beta(T - T_e) \quad (25)$$

と得る。ただし、 $k_1/k_2 = \kappa e^{\Delta R/T}$  であるから、式(25)は  $T$  について非線型である。適当に変数をスケールすると

$$\dot{x} = \frac{\alpha}{\kappa e^{\Delta r/x} + 1} - (x - x_e) \quad (26)$$

という形になる。光を照射している時は  $\alpha \neq 0$ 、照射していない時は  $\alpha = 0$  である。今、 $\alpha(t) = 1$  or  $0$  という二準位雑音と考え、その影響を調べてみると図3のような温度の確率分布が得られる。

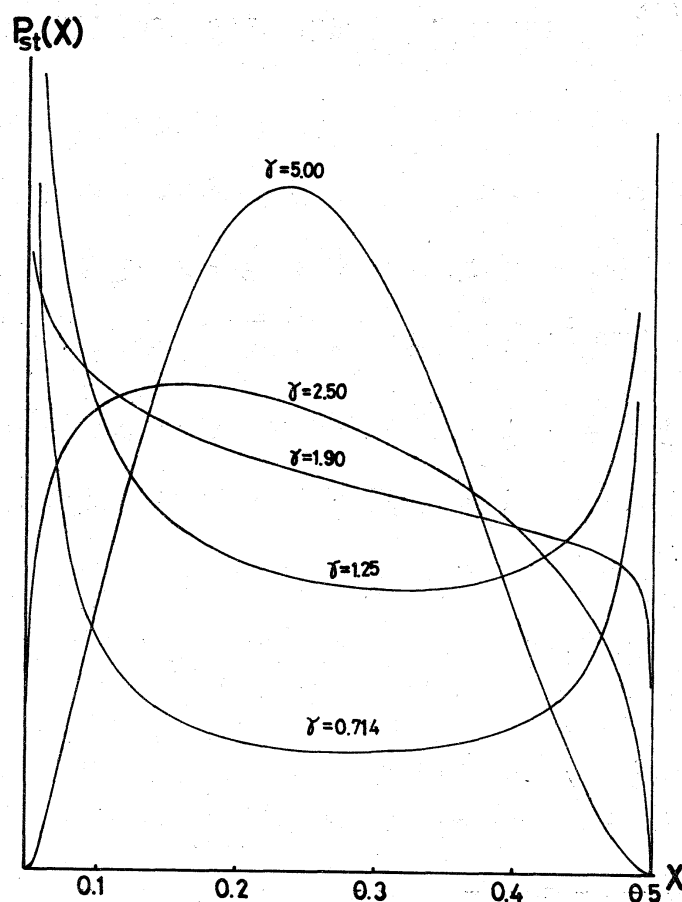


図3. 乱雑に光照射した化学反応の模型

$$\dot{x} = \alpha(t) / [x e^{\Delta r/x} + 1] - (x - x_e)$$

に対する定常確率分布。  $\alpha(t) = 1$  or  $0$  で

相関時間は  $\gamma^{-1}$ 。  $x = 1.0$ ,  $\Delta r = 0.1$ ,

$x_e = 0.05$ 。

以上、3つの例から判るように、揺ぎの振幅  $\Delta^2$  を一定にしても、相関時間を変えることにより、全く定性的に異な

る定常確率分布を得る。一種の相転移とみなすこともできようが、系の変数  $x(t)$  について、 $\langle x(t)x(t') \rangle$  などにどのような異常が出るか、などについて未だ不明である。

一変数の系に対する揺動が二準位雑音の場合、白色でない効果と調べることができた訳であるが、これとそのまま、多準位雑音に拡張すること（詳細釣り合いの成立しない雑音も含める！）、及び、多変数で記述される系（振動系、混沌系）へ拡張することは不可能である。

#### 引用文献

- (1) L. Arnold, W. Horsthemke and R. Lefever, Z. Physik B29 367 (1978).
- (2) K. Kitahara, W. Horsthemke and R. Lefever, Phys. Lett. to appear (1979).
- (3) 例えば, F. Schlögl, Z. Physik 253 147 (1972).
- (4) R.P. Garay and R. Lefever, J. Theor. Biol. 73 417 (1978).
- (5) A. Nitzan and J. Ross, J. Chem. Phys. 59 241 (1973).